2021 届高三湖北十一校第二次联考数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	B	D	B	A	C	CD	BC	BCD	AC

13. $\frac{\pi}{3}$　　14. 0.0044　　15. $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ （答案不唯一）　　16. $\left[\frac{1}{2e},1\right]$

17.（1）在 ΔABD 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知，$\frac{5}{\sin45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，所以 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知，$\angle ADB<90^\circ$，所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$；　……………………5 分

（2）由题设及（1）知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.在 ΔBCD 中，由余弦定理得

$$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25.$$

所以 $BC=5$.　……………………10 分

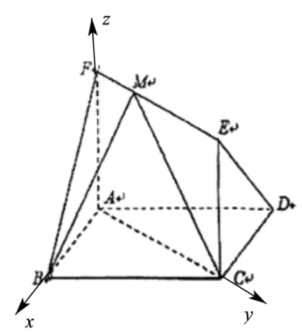
18.（1）$\because AB=\sqrt{2},BC=AD=2,\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$\therefore AC=\sqrt{2}$,

$AB^2+AC^2=BC^2,\therefore AB\perp AC$, 又 $AF\perp AC$，

平面 $ACEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACEF\cap$ 平面 $ABCD=AC$，

$AF\subset$ 平面 $ACEF$，　$\therefore AF\perp$ 平面 $ABCD$，

以 AB，AC，AF 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图，



$A(0,0,0),B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),D(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),E(0,\sqrt{2},1),F(0,0,1),$

设 $M(0,y,1),0\le y\le\sqrt{2}$.

则 $\overrightarrow{AE}=(0,\sqrt{2},1),\overrightarrow{DM}=(\sqrt{2},y-\sqrt{2},1)$，

$\because AE\perp DM$，$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DM}=\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+1=0$，解得 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\frac{FM}{FE}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $AE\perp DM$ 时，点 M 为 EF 的中点.　……………………6 分

（2）由（1），$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1),\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,设平面 MBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BM}=-\sqrt{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0\end{cases}$$，取 $y_1=2$，则 $\vec{m}=(2,2,\sqrt{2})$，

易知平面 ECD 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$，

$$\therefore\cos\theta=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{4+4+2}}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

$\therefore$ 平面 MBC 与平面 ECD 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.　……………………12 分

19.（1）将 $n=1$ 代入 $a_n+a_{n+1}=2n+1$ 得 $a_2=3-1=2$.

由 $a_n+a_{n+1}=2n+1$①，可以得到 $a_{n+1}+a_{n+2}=2n+3$②，

②−① 得 $a_{n+2}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项、偶数项都是以 2 为公差的等差数列，

当 $n=2k$ 时，$a_n=a_2+2(k-1)=2k=n$

当 $n=2k-1$ 时，$a_n=a_1+2(k-1)=2k-1=n$

$\therefore a_n=n,n\in N^*$.　……………………6 分

（2）$\because b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore S_n=b_1+b_2+...+b_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

若 $S_k=4S_m^2$,则 $\frac{k}{k+1}=\frac{4m^2}{(m+1)^2}$，即 $1+\frac{1}{k}=\frac{(m+1)^2}{4m^2}$，得 $\frac{1}{k}=\frac{-3m^2+2m+1}{4m^2}$.

$\because 1<m<k$　$\therefore 0<\frac{1}{k}<\frac{1}{m}<1\therefore 0<\frac{-3m^2+2m+1}{4m^2}<\frac{1}{m}<1$.

$\therefore\begin{cases}3m^2-2m-1<0\\3m^2+2m+1>0\\m>1\end{cases}$　解得 $\begin{cases}\frac{1}{3}<m<1\\m>1\end{cases}$，矛盾.

$\therefore$ 不存在 m,k 满足题意.　……………………12 分

20.（1）设这个小球掉入 5 号球槽为事件 A．掉入 5 号球槽，需要向右 4 次向左 2 次，所以 P（A）$=C_6^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{64}$．所以这个小球掉入 5 号球槽的概率为 $\frac{15}{64}$．　……………………4 分

（2）小红的收益计算如下：每一次游戏中，ξ 的可能取值为 0，4，8，12．

$P(\xi=0)=P(m=4)=C_6^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$，

$P(\xi=4)=P(m=3)+P(m=5)=C_6^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4+C_6^4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^2=\frac{15}{32}$，

$P(\xi=8)=P(m=2)+P(m=6)=C_6^1(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^5+C_6^5(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})=\frac{3}{16}$，

$P(\xi=12)=P(m=1)+P(m=7)=C_6^0(\frac{1}{2})^6+C_6^6(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{32}$．

ξ	0	4	8	12
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

一次游戏付出的奖金 $E\xi=0\times\frac{5}{16}+4\times\frac{15}{32}+8\times\frac{3}{16}+12\times\frac{1}{32}=\frac{15}{4}$，则小红的收益为 $6-\frac{15}{4}=\frac{9}{4}$.　………8 分

小明的收益计算如下：每一次游戏中，η 的可能取值为 0，1，4，9.

$P(\eta=0)=P(n=4)=C_4^3(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$，

$P(\eta=1)=P(n=3)+P(n=5)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2+C_4^4(\frac{2}{3})^4=\frac{40}{81}$,

$P(\eta=4)=P(n=2)=C_4^1(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})=\frac{8}{81}$,

$P(\eta=9)=P(n=1)=(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$.

η	0	1	4	9
P	$\frac{32}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

一次游戏付出的奖金 $E\eta=0\times\frac{32}{81}+1\times\frac{40}{81}+4\times\frac{8}{81}+9\times\frac{1}{81}=1$,则小明的收益为 4-1=3.

$\because 3>\frac{9}{4}$ $\therefore$小明的盈利多. ……………………12 分

21.（1）设点 $P(x,y)$，则 $|PF|=|y|+1$，即 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y|+1$

化简得 $x^2=2|y|+2y$ $\because y\geqslant 0$ $\therefore x^2=4y$.

$\therefore$点 P 的轨迹方程为 $x^2=4y$. ……………………4 分

（2）对函数 $y=\frac{1}{4}x^2$求导数$y'=\frac{1}{2}x$.

设切点 $(x_0,\frac{1}{4}x_0^2)$，则过该切点的切线的斜率为 $\frac{1}{2}x_0$，

$\therefore$切线方程为 $y-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$. 即 $y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2$

设点 $Q(t,t-4)$，由于切线经过点 Q，$\therefore t-4=\frac{1}{2}x_0t-\frac{1}{4}x_0^2$

即 $x_0^2-2tx_0+4t-16=0$

设 $A(x_1,\frac{1}{4}x_1^2),B(x_2,\frac{1}{4}x_2^2)$，则 x_1,x_2 是方程 $x^2-2tx+4t-16=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=2t$，$x_1x_2=4t-16$ ……………………8 分

设 M 为 AB 中点，$\therefore x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=t$.

$\therefore y_M=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2)=\frac{1}{8}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=\frac{1}{8}\left[4t^2-2(4t-16)\right]=\frac{1}{2}t^2-t+4$

$\therefore$点 $M(t,\frac{1}{2}t^2-t+4)$ 又$\because k_{AB}=\frac{\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{t}{2}$

$\therefore$直线 AB 的方程为 $y-(\frac{1}{2}t^2-t+4)=\frac{t}{2}(x-t)$，即 $t(x-2)+8-2y=0(*)$

$\therefore$当 $x=2,y=4$ 时，方程（*）恒成立.

$\therefore$对任意实数 t，直线 EF 恒过定点(2,4). ……………………12 分

22.（1）$\because f'(x)=\frac{2ax\cdot e^x-e^x(ax^2+b)}{(e^x)^2}=\frac{-ax^2+2ax-b}{e^x}$

$\because f(x)$ 在 x=2 时取得极大值 $\frac{4}{e^2}$

$\therefore \begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=\frac{4}{e^2} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -4a+4a-b=0 \\ \frac{4a+b}{e^2}=\frac{4}{e^2} \end{cases}$

解得 a=1, b=0. 关注QQ群416652117 ……………………4 分

（2）设 $F(x)=f(x)-(x-\frac{1}{x})=\frac{x^2}{e^x}-x+\frac{1}{x},x>0$，则$F'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-1-\frac{1}{x^2},x>0$.

当 $x\geqslant 2$时，$F'(x)<0$恒成立.

当$0<x<2$时，$x(2-x)\leqslant\left[\frac{x+(2-x)}{2}\right]^2=1$,从而$F'(x)\leqslant\frac{1}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}<1-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}<0$.

$\therefore F'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，故$y=F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

$\because F(1)=\frac{1}{e}>0,F(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{2}<0$,所以$F(1)\cdot F(2)<0$. 又曲线 $y=F(x)$在$[1,2]$上连续不间断，故由函数零点存在定理及其单调性知，存在唯一的 $x_0\in(1,2)$,使得$F(x_0)=0$,

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$时，$F(x)>0$,当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F(x)<0$.

$\therefore g(x)=\min\left\{f(x),x-\frac{1}{x}\right\}=\begin{cases} x-\frac{1}{x},0<x\leqslant x_0, \\ \frac{x^2}{e^x},x>x_0. \end{cases}$

$\therefore h(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x}-tx^2, & 0<x\leqslant x_0 \\ \frac{x^2}{e^x}-tx^2, & x>x_0 \end{cases}$ ……………………8 分

故 $h'(x)=\begin{cases} 1+\frac{1}{x^2}-2tx,0<x\leqslant x_0, \\ \frac{x(2-x)}{e^x}-2tx,x>x_0. \end{cases}$

由于函数 $h(x)=g(x)-tx^2$为增函数，且曲线 $y=h(x)$在$(0,+\infty)$上连续不间断，

$\therefore h'(x)\geqslant 0$在$(0,x_0)$和$(x_0,+\infty)$上恒成立.

①当$x>x_0$时,$\frac{x(2-x)}{e^x}-2tx\geqslant 0$在$(x_0,+\infty)$上恒成立, 即$2t\leqslant\frac{2-x}{e^x}$在$(x_0,+\infty)$上恒成立, 记$u(x)=\frac{2-x}{e^x}$，$x>x_0$, 则 $u'(x)=\frac{x-3}{e^x}.x>x_0$,当$x_0<x<3$时,$u'(x)<0$,当$x>3$时, $u'(x)>0$,所以$u(x)$在$(x_0,3)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增.所以$\left[u(x)\right]_{\min}=u(3)=-\frac{1}{e^3}$.故$2t\leqslant-\frac{1}{e^3}$,解得$t\leqslant-\frac{1}{2e^3}$.

②当 $0<x<x_0$时, $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-2tx$,当$t\leqslant 0$时,$h'(x)>0$在$(0,x_0)$上恒成立.

综合①、②知，当$t\leqslant-\frac{1}{2e^3}$时, $h(x)$为增函数, 故t的取值范围是$(-\infty,-\frac{1}{2e^3}]$. ……………………12 分